**Системы линейных уравнений.**

**метод Крамера**

Содержание

1. Основные определения.
2. Метод Крамера (определителей) решения систем линейных уравнений.

**1. Основные определения**

* **Системой  линейных уравнений с  неизвестными** называется совокупность уравнений, в каждом из которых неизвестные присутствуют в первой степени:



где числа  - коэффициенты при неизвестных, - номер уравнения, - номер неизвестной, - свободные члены.

* **Решением СЛУ**называется упорядоченный набор значений неизвестных

,

который при подстановке в каждое уравнение системы вместо неизвестных соответственно  обращает их в верные равенства.

* **Решить СЛУ** – это значит **указать все** **решения** системы, то есть такие наборы значений неизвестных, которые обращают уравнения системы в тождества.

Система линейных уравнений называется:

а) **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение;

б) **несовместной**, если она не имеет решений;

в) **определенной**, если она имеет единственное решение;

г) **неопределенной**, если она имеет бесконечное множество решений;

д) **однородной**, если все свободные члены равны нулю ;

е) **неоднородной**, если есть .

**2. Метод Крамера (определителей) решения систем линейных уравнений**

Правило (метод) Крамера применяется к системам, у которых число уравнений равно числу неизвестных. Этот метод использует определители.

**2.1. Число уравнений и неизвестных равно 2**

Рассмотрим систему линейных уравнений



Вычисляются определители:

,, .

Здесь

 - определитель системы, составленный из коэффициентов при неизвестных;

 - это определитель, полученный из определителя  заменой столбца коэффициентов при  на столбец свободных членов;

 - это определитель, полученный из определителя  заменой столбца коэффициентов при  на столбец свободных членов.

**1.** Если , то **система** **совместная и определенная**, то есть **имеет** **единственное решение, которое находится по формулам Крамера:**

 .

**2.** Если , а хотя бы один из определителей ,  отличен от нуля, то **система не имеет решений (несовместная)**.

**3.** Если , то **система имеет бесконечно много решений (совместная и неопределенная)**.

**Пример 1.**Решить с помощью метода Крамера систему уравнений



*Решение*

, поэтому СЛУ имеет единственное решение.

, .

Тогда ; .

**Ответ:**система уравнений совместна и определенна, ее единственное решение .

**Пример 2.** Решить с помощью метода Крамера систему уравнений

.

*Решение*

Определитель системы равен нулю: , однако один из вспомогательных определителей не равен нулю: , значит, СЛУ не имеет решений, то есть СЛУ *несовместная*.

**Пример 3.**Решить с помощью метода Крамера систему уравнений



*Решение*

, , .

Поэтому система *имеет бесконечно много решений*.

Разделив коэффициенты 2-го уравнения на 3, получим:  Оставим только одно из этих уравнений: .

Выразим  через : , значение  - любое действительное число. Это и есть выражение для **общего решения** СЛУ. Ответ можно записать так: , где .

Придавая  различные значения, будем получать бесконечное множество *частных решений*. Например, при  получим  и первое частное решение . При  получим  и второе частное решение , и так далее.

**2.2. Число уравнений и неизвестных равно 3**

Рассмотрим СЛУ



Вычисляются определители:

**, ,**

**, .**

**1.**Если , то система **имеет** **единственное решение, которое находится по формулам Крамера:**

 , .

**2.**Если , а хотя бы один из определителей , ,  отличен от нуля, то **система не имеет решений**.

**3.**Если , то система **имеет бесконечно много решений.**

**Пример 4.** Решить систему линейных уравнений .

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных и вычислим его: ,

значит, СЛУ имеет единственное решение.

Найдем вспомогательные определители и значения неизвестных.







*Ответ*: Система совместная и определенная, единственное решение .

Рассмотрим пример, в котором ***СЛУ имеет бесконечное множество решений***, и они будут найдены с применением формул Крамера.

**Пример 5*.*** Решить СЛУ 

*Решение*

Вычислим определитель системы: 

Заметим, что третье уравнение системы равно сумме первых двух уравнений, т.е. зависит от первых двух уравнений.

Отбросив третье уравнение, получим равносильную систему двух уравнений с тремя неизвестными: 

Оставим в левой части системы те неизвестные, коэффициенты при которых образуют определитель, не равный нулю.

Например, коэффициенты при  и  образуют определитель . Поэтому оставим в левой части уравнений слагаемые с  и , а слагаемые с  перенесем в правую часть с противоположным знаком.

Неизвестное назовем *свободным*, а неизвестные  и - *базисными неизвестными*.

Запишем систему в виде и применим к ней правило Крамера:

;



Выражение

 -

***общее решение*** ***неопределенной СЛУ***, где  - любое действительное число.

Из общего решения можно получить ***частные решения***, если придать свободной неизвестной какое-то конкретное значение.

Например, пусть , тогда ; тогда частное решение . И так далее.

**Контрольные вопросы**

1. Запишите общий вид системы 2 линейных уравнений с тремя неизвестными.
2. Что называется решением СЛУ?
3. Что значит «решить систему линейных уравнений»?
4. Какие системы линейных уравнений называются совместными и несовместными?
5. При каком условии система  линейных уравнений с  неизвестными имеет единственное решение?
6. Напишите формулы Крамера для решения системы линейных уравнений. В каком случае они применимы?
7. Как, зная общее решение, записать частное решение неопределенной системы?