**Тема: Случайные величины. Дискретная случайная величина.**

Второй раздел по [**теории вероятностей**](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) посвящён ***случайным величинам***, которые незримо сопровождали нас буквально в каждой статье по теме. И настал момент чётко сформулировать, что же это такое:

***Случайной*** называют *величину*, которая в результате испытания примет **одно и только одно** числовое значение, зависящее от случайных факторов и заранее непредсказуемое.

Случайные величины, как правило, **обозначают** через  **\***, а их значения – соответствующими маленькими буквами с подстрочными индексами, например, .

***\*****Иногда используют , а также греческие буквы*

Пример встретился нам на [**первом же уроке по теории вероятностей**](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html), где мы фактически рассмотрели следующую случайную величину:

 – количество очков, которое выпадет после броска игрального кубика.

В результате данного испытания выпадет **одна и только** грань, какая именно – не предсказать *(фокусы не рассматриваем)*; при этом случайная величина  может принять одно из следующий значений:

.

Пример из статьи о [**Статистическом определении вероятности**](http://mathprofi.ru/statisticheskoe_opredelenie_verojatnosti.html):

 – количество мальчиков среди 10 новорождённых.

Совершенно понятно, что это количество заранее не известно, и в очередном десятке родившихся детей может оказаться:

, либо  мальчиков – **один и только один** из перечисленных вариантов.

И, дабы соблюсти форму, немного физкультуры:

 –  дальность прыжка в длину *(в некоторых единицах)*.

Её не в состоянии предугадать даже мастер спорта :)

Тем не менее, ваши гипотезы?

Коль скоро речь идёт о [**множестве действительных чисел**](http://mathprofi.ru/mnozhestva.html), то случайная величина  может принять *несчётно много* значений из некоторого числового промежутка. И в этом состоит её принципиальное отличие от предыдущих примеров.

Таким образом, **случайные величины целесообразно разделить на 2 большие группы**:

1) Дискретная *(прерывная)* случайная величина – принимает отдельно взятые, изолированные значения. Количество этих значений *конечно* либо *бесконечно, но счётно*.

…нарисовались непонятные термины? Срочно повторяем [**основы алгебры**](http://mathprofi.ru/mnozhestva.html)!

2) Непрерывная случайная величина – принимает **все** числовые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

***Примечание****: в учебной литературе популярны аббревиатуры ДСВ и НСВ*

Сначала разберём дискретную случайную величину, затем – [**непрерывную**](http://mathprofi.ru/nepreryvnaya_sluchaynaya_velichina.html).

**Закон распределения дискретной случайной величины**

– это*соответствие* между возможными значениями этой величины и их вероятностями. Чаще всего закон записывают таблицей:

Довольно часто встречается термин ***ряд****распределения*, но в некоторых ситуациях он звучит двусмысленно, и поэтому я буду придерживаться «закона».

А теперь **очень важный момент**: поскольку случайная величина  *обязательно* примет **одно из значений** , то соответствующие события образуют [**полную группу**](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html) и сумма вероятностей их наступления равна единице:


или, если записать свёрнуто:


Так, например, закон распределения вероятностей выпавших на кубике очков имеет следующий вид:


Без комментариев.

Возможно, у вас сложилось впечатление, что дискретная случайная величина может принимать только «хорошие» целые значения. Развеем иллюзию – они могут быть любыми:

Пример 1

Некоторая игра имеет следующий закон распределения выигрыша:


Найти 

…наверное, вы давно мечтали о таких задачах :) Открою секрет – я тоже. В особенности после того, как завершил работу над [**теорией поля**](http://mathprofi.ru/teoriya_polya.html).

**Решение**: так как случайная величина  может принять только одно из трёх значений, то соответствующие события образуют *полную группу*, а значит, сумма их вероятностей равна единице:


Разоблачаем «партизана»:

 – таким образом, вероятность выигрыша  условных единиц составляет 0,4.

Контроль: , в чём и требовалось убедиться.

**Ответ**: 

Не редкость, когда закон распределения требуется составить самостоятельно. Для этого используют [**классическое определение вероятности**](http://mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html), [**теоремы умножения / сложения вероятностей событий**](http://mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html) и другие фишки [**тервера**](http://mathprofi.ru/teorija_verojatnostei.html):

Пример 2

В коробке находятся 50 лотерейных билетов, среди которых 12 выигрышных, причём 2 из них выигрывают по 1000 рублей, а остальные – по 100 рублей. Составить закон распределения случайной величины  – размера выигрыша, если из коробки наугад извлекается один билет.

**Решение**: как вы заметили, значения случайной величины принято располагать в порядке их возрастания. Поэтому мы начинаем с самого маленького выигрыша, и именно  рублей.

Всего таковых билетов 50 – 12 = 38, и по [**классическому определению**](http://mathprofi.ru/zadachi_na_klassicheskoe_opredelenie_verojatnosti_primery_reshenij.html):
 – вероятность того, что наудачу извлечённый билет окажется безвыигрышным.

С остальными случаями всё просто. Вероятность выигрыша  рублей составляет:


И для :


Проверка:  – и это особенно приятный момент таких заданий!

**Ответ**: искомый закон распределения выигрыша:


Следующее задание для самостоятельного решения:

Пример 3

Вероятность того, что стрелок поразит мишень, равна . Составить закон распределения случайной величины  – количества попаданий после 2 выстрелов.

…я знал, что вы по нему соскучились :) Вспоминаем [**теоремы умножения и сложения**](http://mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html). Решение и ответ в конце урока.

Закон распределения полностью описывает случайную величину, однако на практике бывает полезно (а иногда и полезнее) знать лишь некоторые её ***числовые характеристики***.

**Математическое ожидание дискретной случайной величины**

Говоря простым языком, это *среднеожидаемое значение* при многократном повторении испытаний. Пусть случайная величина  принимает значения  с вероятностями  соответственно. Тогда математическое ожидание  данной случайной величины равно *сумме произведений* всех её значений на соответствующие вероятности:



или в свёрнутом виде:


Вычислим, например, математическое ожидание случайной величины  – количества выпавших на игральном кубике очков:

 очка

В чём состоит вероятностный смысл полученного результата? Если подбросить кубик достаточно много раз, то *среднее значение* выпавших очков будет близкО к 3,5 – и чем больше провести испытаний, тем ближе. Собственно, об этом эффекте я уже подробно рассказывал на уроке о [**статистической вероятности**](http://mathprofi.ru/statisticheskoe_opredelenie_verojatnosti.html).

Теперь вспомним нашу гипотетическую игру:


Возникает вопрос: а выгодно ли вообще играть в эту игру? …у кого какие впечатления? Так ведь «навскидку» и не скажешь! Но на этот вопрос можно легко ответить, вычислив математическое ожидание, по сути – *средневзвешенный* по вероятностям выигрыш:

, таким образом, математическое ожидание данной игры **проигрышно**.

Не верь впечатлениям – верь цифрам!

Да, здесь можно выиграть 10 и даже 20-30 раз подряд, но на длинной дистанции нас ждёт неминуемое разорение. И я бы не советовал вам играть в такие игры :) Ну, может, только [**ради развлечения**](http://mathprofi.ru/nezavisimye_ispytanija_i_formula_bernulli.html).

Из всего вышесказанного следует, что математическое ожидание – это уже НЕ СЛУЧАЙНАЯ величина.

Пример 5

Случайная величина  задана своим законом распределения вероятностей:


Найти , если известно, что . Выполнить проверку.

Есть?

Тогда переходим к изучению [**дисперсии дискретной случайной величины**](http://mathprofi.ru/dispersia_diskretnoi_sluchainoi_velichiny.html), и по возможности, **ПРЯМО СЕЙЧАС!!** – чтобы не потерять нить темы.

Решения и ответы:

Пример 3. ***Решение***: по условию ** – вероятность попадания в мишень. Тогда:
** – вероятность промаха.

Составим ** – закон распределения попаданий при двух выстрелах:

** – ни одного попадания. По [***теореме умножения вероятностей независимых событий***](http://mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):
**

** – одно попадание. По [***теоремам сложения вероятностей несовместных и умножения независимых событий***](http://mathprofi.ru/teoremy_slozhenija_i_umnozhenija_verojatnostei.html):
**

** – два попадания. По теореме умножения вероятностей независимых событий:
**

Проверка: 0,09 + 0,42 + 0,49 = 1

**Ответ**: **

Пример 4. ***Решение***: игрок выигрывает 100 рублей в 18 случаях из 37, и поэтому закон распределения его выигрыша имеет следующий вид:
**
Вычислим математическое ожидание:
**
Таким образом, с каждой поставленной сотни игрок в среднем проигрывает 2,7 рубля.

Пример 5. ***Решение***: по определению математического ожидания:
**
поменяем части местами и проведём упрощения:
**
таким образом:
**

Выполним проверку:
**
**, что и требовалось проверить.

**Ответ**: **

**Тема: Равносильные уравнения и неравенства**

**Определение 1:**

 Два уравнения f1(x)=g1(x) с областью определения M1 и f2(x)=g2(x) с областью определения M2 называются равносильным на множестве ⊆1⋂2, если они имеют одни и те же решения или не имеют решений на этом множестве.

**Теорема 1** :

Пусть даны три уравнения: f1(x)=g1(x)(1) с областью определения M1; f2(x)=g2(x) (2) с областью определения 2; f3(x)=g3(x)с областью определения3. И пусть M⊆M1⋂M2⋂M3. Тогда, если уравнение (1) равносильно уравнению (2) на множестве M, уравнение (2) равносильно уравнению (3) на множестве M, то уравнение (1) равносильно уравнению (3) на множествеА

**Теорема 2:**

 Если одну или обе части данного уравнения тождественно преобразовать, то получим уравнение, Б-равносильное данному.

**Теорема 3:**

Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же математическое выражение, то получим уравнение, Б-равносильное данному.(f(x)=g(x))⇔⁡(f(x)+φ(x)=g(x)+φ(x))

**Теорема 4:**

 Уравнения f(x)=g(x)(1) и f(x)φ(x)=g(x)φ(x)(2), где φ(E)не равно нулю в области определения уравнения (1), Б-равносильны.

**Теорема 5** :

Уравнение f1(x)f2(x)...fn(x)=0(1) и совокупность уравнений [f1(x)=0,f2(x)=0,⋯fn(x)=0 (2) Б-равносильны.

**Теорема 6:**

 Уравнения f(x)=g(x)(1) и (2) f2n+1(x)=g2n+1(x), где n∈N, Б-равносильны.

**Теорема 7** :

Уравнение f(x)=g(x)(1) равносильно уравнению (2) f2n(x)=g2n(x),где n∈N, на множестве решений неравенства f(x)g(x)≥0. Следствие. Уравнение f(x)2n=g(x) Б-равносильно системе {f(x)=g2n(x),g(x)≥0.

**Теорема 8**

Уравнение fn(x)=gn(x), где n∈N, является следствием уравненияf(x)=g(x)

**Теорема 9** :

Уравнение af(x)=ag(x), где a>0,a≠1, Б-равносильно уравнению f(x)=g(x)

**Теорема 10** :

Уравнение loga⁡f(x)=loga⁡g(x), где a>0,a≠1, Б-равносильно уравнению f(x)=g(x). Следствие 1. Уравнение loga⁡f(x)=loga⁡g(x), где a>0,a≠1 Б-равносильно каждой из систем {f(x)=g(x),f(x)>0 и {f(x)=g(x),g(x)>0. Следствие 2. Уравнение loga⁡f(x)=b, где a>0,a≠1. Б-равносильно уравнению f(x)=ab

**Равносильность неравенств**

**Определение 2:**

 Два неравенства, у первого з которых область определения 1, у другого 2, называются равносильными на множестве ⊆1⋂2, если они имеют одни и те же решения или не имеют решений на этом множестве.

**Теорема 11:**

 Пусть даны три неравенства: (1) с областью определения M1; (2) с областью определения M2; (3) с областью определения M3. И пусть M⊆M1⋂M2⋂M3. Тогда, если неравенство (1) равносильно неравенству (2) на множестве M, неравенство (2) равносильно неравенству (3) на множестве M, то неравенство (1) равносильно неравенству (3) на множестве M.

**Теорема 12:**

 Если одну или обе части данного неравенства тождественно преобразовать, то получим неравенство, Б-равносильное данному

**Теорема 13** :

Если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же математическое выражение, то полученное неравенство того же смысла Б-равносильно данному

**Теорема 14:**

 Если обе части неравенства умножить на одно и то же выражение , принимающее в области определения данного неравенства только положительные (отрицательные) значения, то полученное неравенство того же (противоположного) смысла Б-равносильно данному.

**Теорема 15** :

Неравенство f(x)φ(x)>0 Б-равносильно совокупности двух систем \[

**Теорема 16:**

 Неравенство f(x)φ(x)≤0 Б-равносильно совокупности [{f(x)>0,φ(x)0,f(x)=0,φ(x)=0.

 **Теорема 17 :**

Неравенство f(x)>φ(x) (1) равносильно неравенству f2n(x)>φ2n(x) (2) на множестве решений системы неравенств {f(x)≥0,φ(x)≥0

**Пример 1** Решить уравнение 2x−1=x−2 Найдем область определения: Рисунок 1. Возведем обе части в квадрат: 2x−1=x2−4x+4 x2−6x+5=0 п о с т о р о н н и й к о р е н ь x=1−посторонний корень, x=5 Ответ: 5.

**Тема: Иррациональные Уравнения**

 Уравнения, в которых под знаком корня содержится переменная, называт иррациональными.

Методы решения иррациональных уравнений, как правило, основаны на возможности замены (с помощью некоторых преобразований) иррационального уравнения рациональным уравнением, которое либо эквивалентно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. Чаще всего обе части уравнения возводят в одну и ту же степень. При этом получается уравнение, являющееся следствием исходного.

При решении иррациональных уравнений необходимо учитывать следующее:

1) если показатель корня - четное число, то подкоренное выражение должно быть неотрицательно; при этом значение корня также является неотрицательным (опредедение корня с четным показателем степени);

2) если показатель корня - нечетное число, то подкоренное выражение может быть любым действительным числом; в этом случае знак корня совпадает со знаком подкоренного выражения.

**Пример 1.** Решить уравнение

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат.
x2 - 3 = 1;
Перенесем -3 из левой части уравнения в правую и выполним приведение подобных слагаемых.
x2 = 4;
Полученное неполное квадратное уравнение имеет два корня  -2 и 2.

Произведем проверку полученных корней, для этого произведем подстановку значений переменной x в исходное уравнение.
Проверка.
При x1 = -2  - истинно:
При x2 = -2- истинно.
Отсюда  следует, что исходное иррациональное уравнение   имеет два  корня -2 и 2.

**Пример 2.** Решить уравнение.

Это уравнение можно решить по такой же методике как и в первом примере, но мы поступим иначе.

Найдем ОДЗ данного уравнения. Из определения квадратного корня следует, что в данном уравнении одновременно должны выполнятся два условия:

а) x - 90;

x9;

б) 1 - x0;

-x-1 ;

x1.

ОДЗ данного уранения: x.

Ответ: корней нет.

**Пример 3.** Решить уравнение=+ 2.

Решение.

Нахождение ОДЗ в этом уравнении представляет собой достаточно трудную задачу. Возведем обе части уравнения в квадрат:
x3 + 4x - 1 - 8= x3 - 1 + 4+ 4x;
=0;
x1=1; x2=0.
Произведя проверку устанавливаем, что x2=0  лишний корень.
Ответ: x1=1.

**Пример 4.** Решить уравнение x =.

Решение.

В этом примере ОДЗ найти легко. ОДЗ этого уравнения: x[-1;).

Возведем обе части этого уравнения в квадрат, в результате получим уравнение x2= x + 1. Корни этого уравнения:

x1 =

x2 =

Произвести проверку найденных корней трудно. Но, несмотря на то, что оба корня принадлежат ОДЗ утверждать, что оба корня являются корнями исходного уравнения нельзя. Это приведет к ошибке. В данном случае иррациональное уравнение равносильно совокупности двух неравенств и одного уравнения:

x + 10 **и** x0 **и** x2 = x + 1, из которой следует, что отрицательный корень для иррационального уравнения является посторонним и его нужно отбросить.

Ответ:

**Пример 5 .** Решить уравнение+= 7.

Решение.

Возведем обе части уравнения в квадрат и выполним  приведение подобных членов, перенес слагаемых из одной части равенства в другую и умножение обеих частей на 0,5. В результате мы получим уравнение
 = 12,  (\*) являющееся следствием исходного. Снова возведем обе части уравнения в квадрат. Получим уравнение (х + 5)(20 - х) = 144,  являющееся следствием исходного. Полученное уравнение приводится к виду x2 - 15x + 44 =0.

Это уравнение (также являющееся следствием исходного) имеет корни x1 = 4, х2= 11. Оба корня, как показывает проверка, удовлетворяют исходному уравнению.

Отв. х1 = 4, х2= 11.

Замечание. При возведении уравнений в квадрат учащиеся нередко в уравнениях типа (\*) производят перемножение подкоренных выражений, т. е. вместо уравнения•= 12, пишут уравнение  = 12. Это не приводит к ошибкам, поскольку уравнения  являются следствиями уравнений. Следует, однако, иметь в виду, что в общем случае такое перемножение подкоренных выражений дает неравносильные уравнения.

В рассмотренных выше примерах можно было сначала перенести один из радикалов в правую часть уравнения. Тогда в левой части уравнения останется один радикал и после возведения обеих частей уравнения в квадрат в левой части уравнения получится рациональная функция. Такой прием (уединение радикала) довольно часто применяется при решении иррациональных уравнений.

**Пример 6**. Решить уравнение-= 3.

Решение.

 Уединив первый радикал, получаем уравнение
=+ 3, равносильное исходному.

  Возводя обе части этого уравнения в квадрат, получаем уравнение

  x2 + 5x + 2 = x2 - 3x + 3 + 6, равносильное уравнению

  4x - 5 = 3(\*). Это уравнение является следствием исходного уравнения. Возводя обе части уравнения  в квадрат, приходим к уравнению
16x2 - 40x + 25 = 9(x2 - Зх + 3), или

 7x2 - 13x - 2 = 0.

   Это уравнение является следствием уравнения (\*) (а значит, и исходного уравнения) и имеет корни. Первый корень x1 = 2 удовлетворяет исходному уравнению, а второй x2 =- не удовлетворяет.

 Ответ: x = 2.

  Заметим, что если бы мы сразу, не уединив один из радикалов, возводили обе части исходного уравнения в квадрат нам бы пришлось выполнить довольно громозкие преобразования.

  При решении иррациональных уравнений, кроме уединения радикалов используют и другие методы. Рассмотрим пример использования метода замены неизвестного (метод введения вспомогательной переменной).

 **Пример 7**. Решить уравнение 2x2 - 6x ++ 2 = 0.

 Решение.

  Введем вспомогательную переменную. Пусть y =, где y0, тогда получим уравнение 2y2 + y - 10 = 0;
y1= 2; y2 = -. Второй корень не удовлетворяет условию y0.
Возвращаемся к x:
= 2;
x2 - 3x + 6 = 4;
x2 -3x + 2 = 0;
x1 = 1; x2 = 2. Проверкой устанавливаем, что оба корня являются корнями иисходного уравнения.
Ответ: x1 = 1; x2 = 2.